

Gegeben: kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung in der Sonne (\approx Masseschwerpunkt). Für die Gesamtenergie gilt:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = Const \quad (1)$$

Außerdem ist der Drehimpuls \vec{L} bezogen auf die Sonne eine Erhaltungsgröße:

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = Const \quad (2)$$

Auf Grund der Drehimpulserhaltung findet die Bewegung in einer Ebene statt und man kann das Koordinatensystem so drehen das $z \equiv 0$ für alle Zeiten ist. Dann gilt:

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \vec{v}^2 = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad \text{und} \quad E_{pot} = -G \frac{Mm}{|\vec{r}|} = -G \frac{Mm}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (3)$$

$$\vec{L} = m (x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x}) \cdot \vec{e}_z \quad (4)$$

Mit den Polarkoordinaten (r, ϕ) folgt für x , y , \dot{x} und \dot{y} :

$$x = r \cos(\phi) \quad \text{und} \quad y = r \sin(\phi) \quad (5)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\phi) - r \cdot \dot{\phi} \cdot \sin(\phi) \quad \text{und} \quad \dot{y} = \dot{r} \sin(\phi) + r \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\phi) \quad (6)$$

Durch einsetzen von (5) und (6) in (3) und (4) folgt für die Energien und den Drehimpuls:

$$E_{kin} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\phi}^2) \quad \text{und} \quad E_{pot} = -G \frac{Mm}{r} \quad (7)$$

$$\vec{L} = m r^2 \dot{\phi} \cdot \vec{e}_z \quad (8)$$

Mit Gleichung (8) bekommt man:

$$L := |\vec{L}| = m r^2 \dot{\phi} \quad (9)$$

Stellt man Gleichung (9) nach ϕ und setzt dieses in die kinetische Energie (7a) ein, und diese wiederum zusammen mit der potentiellen energie (7b) in die Gesamtenergie (1) ein, so bekommt man schließlich:

$$E := E_{ges} = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \left(\frac{L}{m r} \right)^2 \right) - G \frac{Mm}{r} \quad (10)$$

Man hat also einen Ausdruck der nur noch von r und \dot{r} abhängt und den Anfangswerten der Bewegung für die Energie E und den Drehimpulsbetrag L . Umstellen der Gleichung (10) nach \dot{r} liefert:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + G \frac{Mm}{r} \right) - \left(\frac{L}{m r} \right)^2} \quad (11)$$

Für einen Körper der sich von der Sonne entfernt ist die positive Wurzel von Interesse. Gleichung (11) ist eine seperierbare Differentialgleichung und man bekommt aus ihr für die Zeit als Funktion der Koordinate r :

$$t(r) = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E + G \frac{Mm}{r'} \right) - \left(\frac{L}{mr'} \right)^2}} \quad (12)$$

Zur Integration der Gleichung (12) formt man wie folgt um:

$$t(r) = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 + \frac{GMm}{E} \cdot r' - \frac{L^2}{2mE}}} \quad (13)$$

Als nächstes ergänzt man quadratisch unter der Wurzel, damit folgt:

$$t(r) = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{\left(r' + \frac{GMm}{2E} \right)^2 - \left(\frac{L^2}{2mE} + \left(\frac{GMm}{2E} \right)^2 \right)}} \quad (14)$$

Mit den Abkürzungen $a := \frac{GMm}{2E}$ und $b^2 := \frac{L^2}{2mE} + \left(\frac{GMm}{2E} \right)^2$ folgt also:

$$t(r) = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{r_0}^r \frac{r' dr'}{\sqrt{(r' + a)^2 - b^2}} \quad (15)$$

Mit der Substitution $r' + a =: b \cosh(u)$ folgt $dr' = b \sinh(u) du$ und damit für $t(r)$:

$$t(r) = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{u(r_0)}^{u(r)} \frac{b \cosh(u) - a}{b \sinh(u)} b \sinh(u) du \rightarrow (16)$$

$$t(r) = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{u(r_0)}^{u(r)} (b \cosh(u) - a) du \rightarrow (17)$$

$$t(r) = \sqrt{\frac{m}{2E}} (b \cdot (\sinh(u(r)) - \sinh(u(r_0))) - a \cdot (u(r) - u(r_0))) \quad (18)$$

Als **Endergebnis** erhält man also aus (18) durch Rücksubstitution und unter Anwendung von $\sinh(\operatorname{arccosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$:

$$t(r) = \sqrt{\frac{m}{2E}} \cdot \sqrt{\left(r + \frac{GmM}{2E} \right)^2 - \left(\frac{L^2}{2mE} + \left(\frac{GmM}{2E} \right)^2 \right)} - GM \sqrt{\frac{m}{2E}}^3 \cdot \operatorname{arccosh} \left(\frac{r + \frac{GmM}{2E}}{\sqrt{\frac{L^2}{2mE} + \left(\frac{GmM}{2E} \right)^2}} \right) + Const \quad (19)$$